

## **5. MODELOS PROBABILISTICOS.**

### **5.1 Experimento de Bernoulli**

Un modelo probabilístico, es la forma que pueden tomar un conjunto de datos obtenidos aleatoriamente. Pueden ser modelos probabilísticos discretos o continuos. Los primeros, en su mayoría se basan en repeticiones de pruebas de Bernoulli. En teoría de Probabilidad y estadística, un ensayo de Bernoulli es un experimento aleatorio en el que sólo se pueden obtener dos resultados, que habitualmente son etiquetados como éxito y fracaso. Se denomina así en honor a Jakob Bernoulli. Los ensayos están modelados por una variable aleatoria que puede tomar sólo dos valores, 0 y 1. Habitualmente, se utiliza el 1 para representar el éxito.

Si  $p$  es la probabilidad de éxito, entonces el valor del valor esperado de la variable aleatoria es  $p$  y su varianza  $p(1 - p)$ .

### **5.2 Distribución de Bernoulli.**

La distribución Bernoullies una distribución que toma dos valores 1 (éxito) y 0 (fracaso) con probabilidad  $p$  y  $1-p$ , respectivamente.

**Definición.** Una variable aleatoria  $x$  tiene una distribución de Bernoulli si, para algún  $p$  con  $(0 \leq p \leq 1)$

$$P(E) = p \quad \text{donde } P(E) \text{ es la probabilidad de éxito.}$$

$$P(F) = 1 - p = q \quad \text{donde } P(F) \text{ es la probabilidad de fracaso.}$$

La función de probabilidad  $f(x)$  está dada por:

$$f(x) = p^x(1 - p)^{1-x} = p^x q^{1-x} \quad x = 0, 1$$

**Ejemplo 5.1.** Lanzar una vez un dado y que el resultado sea un 4. Cuando lanzamos un dado tenemos 6 posibles resultados:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Estamos realizando un único experimento (lanzar el dado una sola vez). Se considera éxito sacar un 4, por tanto, la probabilidad:

$$P(E) = \frac{1}{6} \qquad P(F) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Por lo que la función de probabilidad es:

$$f(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^{1-1} = \frac{1}{6}$$

### **5.3 Distribución Binomial.**

La distribución binomial es una distribución de probabilidad discreta que mide el número de éxitos en una secuencia de  $n$  ensayos de Bernoulli independientes entre sí, con una probabilidad fija de  $p$  de ocurrencia del éxito entre los ensayos.

Una distribución binomial tiene las siguientes características:

- 1) En cada prueba del experimento sólo son posibles dos resultados éxito y fracaso.
- 2) La probabilidad de éxito es constante, es decir, que no varía de una prueba a otra y es  $p$ .
- 3) La probabilidad de fracaso también es constante, y es  $1-p$
- 4) El resultado en cada prueba es independiente de los resultados obtenidos anteriormente.
- 5) La variable aleatoria binomial  $X$  expresa el número de éxitos obtenidos en la  $n$  pruebas. Por tanto, los valores que puede tomar  $X$  son  $0, 1, 2, 3, \dots, n$ .

La distribución binomial se expresa por  $B(n, p)$ .

Cálculo de probabilidades en una distribución binomial,

$$p(x = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Y su función de probabilidad es,

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}; \quad x = 0, 1, 2, 3, \dots, n$$

Donde:  $n$  es el número de pruebas,

$x = k$  es el número de éxitos,

$p$  es la probabilidad de éxito,

$q$  es la probabilidad de fracaso,

El número combinatorio  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  y  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$

Los parámetros de la distribución binomial son,

$$\mu = np, \quad \gamma \quad \sigma^2 = npq,$$

**Ejemplo 5.2.** La última novela de un autor ha tenido un gran éxito, hasta el punto de que el 80% de los lectores ya la han leído. Un grupo de 9 personas son aficionadas a la lectura,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en el grupo hayan leído la novela 6 personas?

$$n = 9, \quad k = 6, \quad p = 0.8, \quad q = 1 - 0.8 = 0.2 \quad \text{y} \quad B(9, 0.8)$$

$$p(x = 6) = \binom{9}{6} (0.8)^6 (0.2)^3 = \frac{9!}{6!(9-6)!} (0.262)(0.008) = 84(0.002096) = \mathbf{0.176}$$

b) ¿Y al menos 6?

$$p(x \leq 6) = p(x = 0) + p(x = 1) + p(x = 2) + p(x = 3) + p(x = 4) + p(x = 5) + p(x = 6) =$$

$$= \binom{9}{0} (0.8)^0 (0.2)^9 + \binom{9}{1} (0.8)^1 (0.2)^8 + \binom{9}{2} (0.8)^2 (0.2)^7 + \binom{9}{3} (0.8)^3 (0.2)^6$$

$$+ \binom{9}{4} (0.8)^4 (0.2)^5 + \binom{9}{5} (0.8)^5 (0.2)^4 + \binom{9}{6} (0.8)^6 (0.2)^3 = \mathbf{0.2618}$$

$$p(x \geq 6) = 1 - p(x \leq 6) = 1 - 0.2618 = \mathbf{0.7383}$$

En la figura 5.1 se puede ver la grafica de la binomial para el ejemplo 5.2,

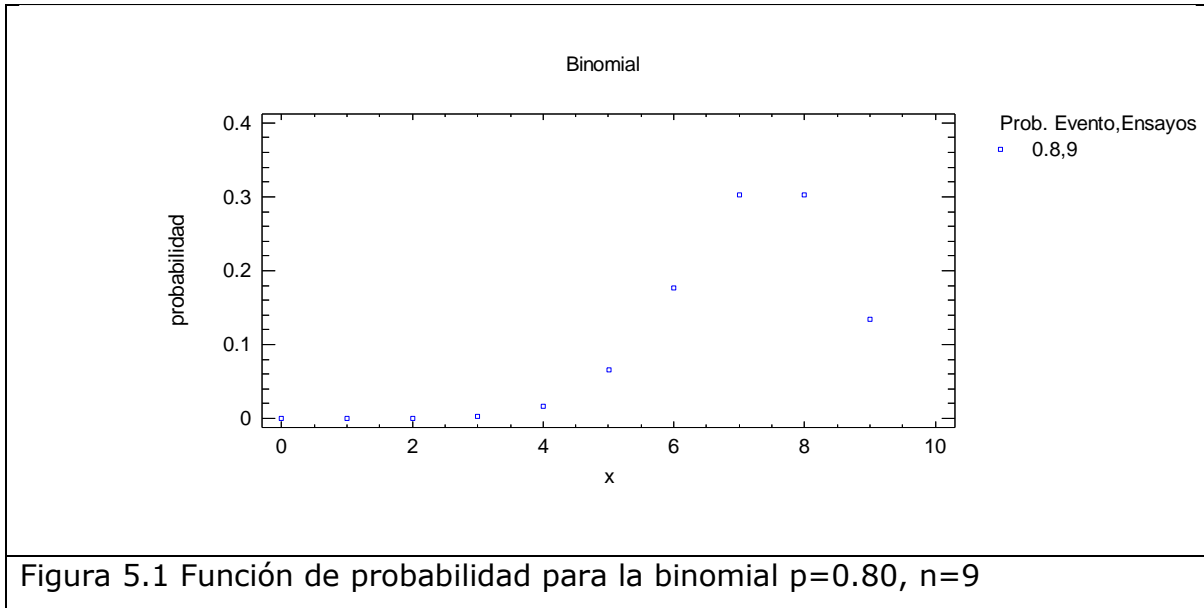


Figura 5.1 Función de probabilidad para la binomial  $p=0.80$ ,  $n=9$

**Ejemplo 5.3.** La probabilidad de que un artículo producido por una fábrica sea defectuoso es 0.03. Se envió un cargamento de 15,000 artículos a unos almacenes. Hallar el número esperado de artículos defectuosos, la varianza y la desviación estándar.

$$p = 0.03, \quad n = 15,000, \quad q = 1 - 0.03 = 0.97$$

El número esperado de artículos es,

$$\mu = (15,000)(0.03) = \mathbf{450}$$

La varianza es,

$$\sigma^2 = (15,000)(0.03)(0.97) = \mathbf{436.5}$$

La desviación estándar es,

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{436.5} = \mathbf{20.89}$$

#### **5.4 Distribución Hipergeométrica.**

La distribución Hipergeométrica se emplea para calcular la probabilidad de obtener determinado número de éxitos en un espacio muestral de  $n$  ensayos; pero a diferencia de la distribución binomial es que los datos de la

muestra se extraen sin reemplazo en una población finita. Por esto es que el resultado de una observación depende o es afectado por el resultado de cualquier otra u otra observación anterior. Es decir la distribución Hipergeométrica se emplea para muestreos sin reemplazo de una población finita cuya probabilidad de ocurrencia cambia a lo largo del ensayo.

**Definición de Distribución Hipergeométrica,** Una variable aleatoria  $x$  tiene distribución Hipergeométrica y su función de probabilidad es,

$$p(x) = \frac{\binom{A}{x} \binom{N-A}{n-x}}{\binom{N}{n}}; \quad x = k = 0, 1, 2, \dots, \min(A, n); \quad n \leq N \quad y \quad A \leq N$$

Donde:

$N$ : número total de elementos

$A$ : número de resultados de éxito de  $N$  elementos

$n$ : número de elementos extraídos

$x = k$  número de resultados de éxito en los  $n$  elementos

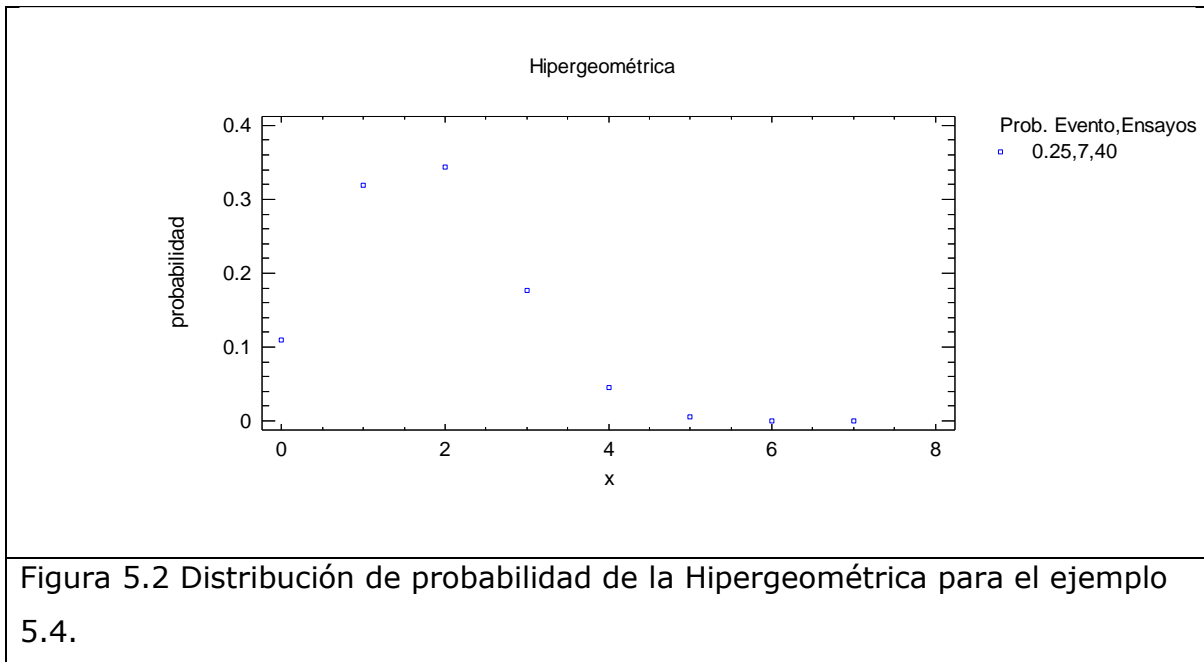
Los parámetros de la distribución Hipergeométrica son,

$$\mu = E(X) = np; \quad \text{Var}(X) = \sigma^2 = npq \left( \frac{N-n}{N-1} \right); \quad \text{donde } p = \frac{A}{N}; \quad y \quad q = 1 - p.$$

**Ejemplo 5.4** Tenemos una baraja de cartas españolas  $N = 40$  naipes, de las cuales nos vamos a interesar en el palo de oros  $A = 10$  naipes de un mismo tipo. Supongamos que de esa baraja extraemos  $n=7$  cartas de una vez (sin reemplazamiento) y se nos plantea el problema de calcular la probabilidad de que hayan  $k = 2$  palos de oros exactamente en esa extracción. La respuesta a este problema es:

$$p(x = 2) = \frac{\binom{10}{2} \binom{40-10}{7-2}}{\binom{40}{7}} = \frac{(45)(142506)}{18643560} = \frac{6412770}{18643560} = \mathbf{0.344}$$

En la figura 5.2, se puede ver la grafica de probabilidad de la Hipergeométrica, para el ejemplo 5.4,



Su valor esperado es,

$$\mu = (7)(0.344) = \mathbf{2.408};$$

Su varianza es,

$$\sigma^2 = (7)(0.344)(0.656) \left( \frac{40-7}{40-1} \right) = (1.579)(0.846) = \mathbf{1.33}$$

Su desviación estándar es,

$$\sigma = \sqrt{1.33} = \mathbf{1.15}$$

### **5.5 Distribución de Poisson.**

La distribución de Poisson es una distribución de probabilidad discreta que expresa, a partir de una frecuencia de ocurrencia media, la probabilidad que ocurra un determinado número de eventos durante cierto periodo de tiempo.

La función de distribución Poisson es

$$f(x) = p(x, \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}; \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

Donde:

$p(x, \lambda)$  Probabilidad de que ocurran  $x$  éxitos, cuando el número promedio de ocurrencia de ellos es  $\lambda$

$\lambda$  es la media o promedio de éxitos por unidad de tiempo, área o producto

$e = 2.71828 \dots$

$x$  es la variable que nos denota el número de éxitos que se desea que ocurra

La distribución de Poisson se aplica a varios fenómenos discretos de la naturaleza (esto es, aquellos fenómenos que ocurren 0, 1, 2, 3, ... veces durante un periodo definido de tiempo o en un área determinada) cuando la probabilidad de ocurrencia del fenómeno es constante en el tiempo o el espacio. Ejemplos de estos eventos que pueden ser modelados por la distribución de Poisson incluyen:

- ❖ El número de autos que pasan a través de un cierto punto en una ruta (suficientemente distantes de los semáforos) durante un periodo definido de tiempo.
- ❖ El número de errores de ortografía que uno comete al escribir una página.
- ❖ El número de llamadas telefónicas en una central telefónica por minuto.
- ❖ El número de servidores web accedidos por minuto.
- ❖ El número de animales muertos encontrados por unidad de longitud de ruta.
- ❖ El número de mutaciones de determinada cadena de ADN después de cierta cantidad de radiación.
- ❖ El número de núcleos atómicos inestables que decayeron en un determinado período
- ❖ El número de estrellas en un determinado volumen de espacio.
- ❖ La distribución de receptores visuales en la retina del ojo humano.
- ❖ La inventiva de un inventor a lo largo de su carrera, etc.

Nótese en los ejemplos que este tipo de experimentos los éxitos buscados son expresados por unidad de área, tiempo, pieza, como son,

- ✓ Número de defectos de una tela por m<sup>2</sup>
- ✓ Número de aviones que aterrizan en un aeropuerto por día, hora, minuto, etc.
- ✓ Número de bacterias por cm<sup>2</sup> de cultivo
- ✓ Número de llamadas telefónicas a un conmutador por hora, minuto, etc.
- ✓ Número de llegadas de embarcaciones a un puerto por día, mes, etc.

Es importante hacer notar que en ésta distribución el número de éxitos que ocurren por unidad de tiempo, área o producto es totalmente al azar y que cada intervalo de tiempo es independiente de otro intervalo dado, así como cada área es independiente de otra área dada y cada producto es independiente de otro producto dado.

**Ejemplo 5.5** Si un banco recibe en promedio 5 cheques sin fondos por día, ¿cuáles son las probabilidades de que reciba tres cheques sin fondos en un día dado?

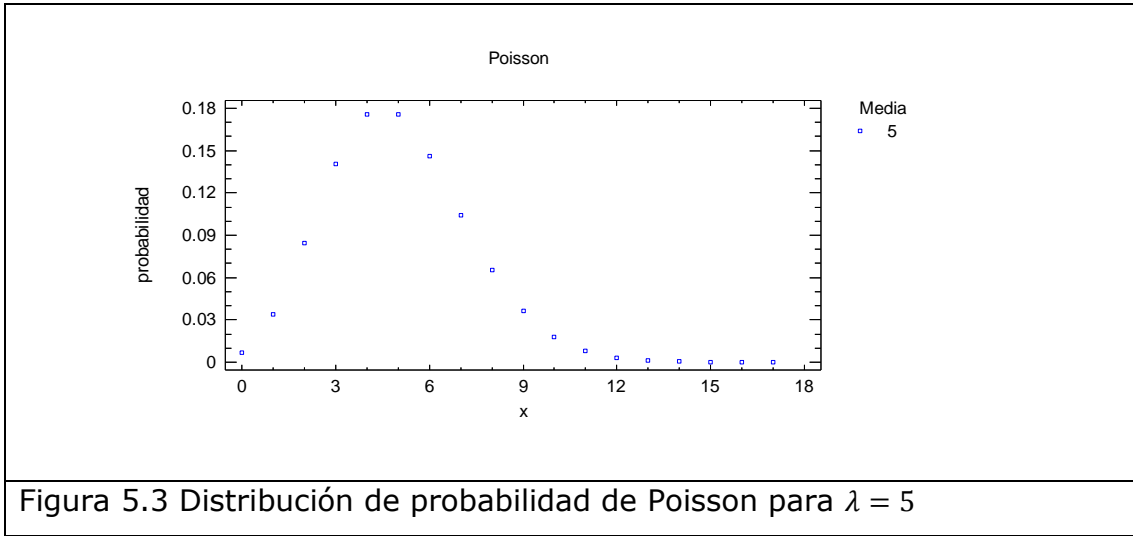
$$p(x = 3, \lambda = 5) = \frac{e^{-5}5^3}{3!} = \frac{(0.00673)(125)}{6} = \frac{0.842}{6} = \mathbf{0.14}$$

¿Cuáles son las probabilidades de que reciba diez cheques sin fondos en un día dado?

$$p(x = 10, \lambda = 5) = \frac{e^{-5}5^{10}}{10!} = \frac{(0.00673)(5^{10})}{3628800} = \mathbf{0.018}$$

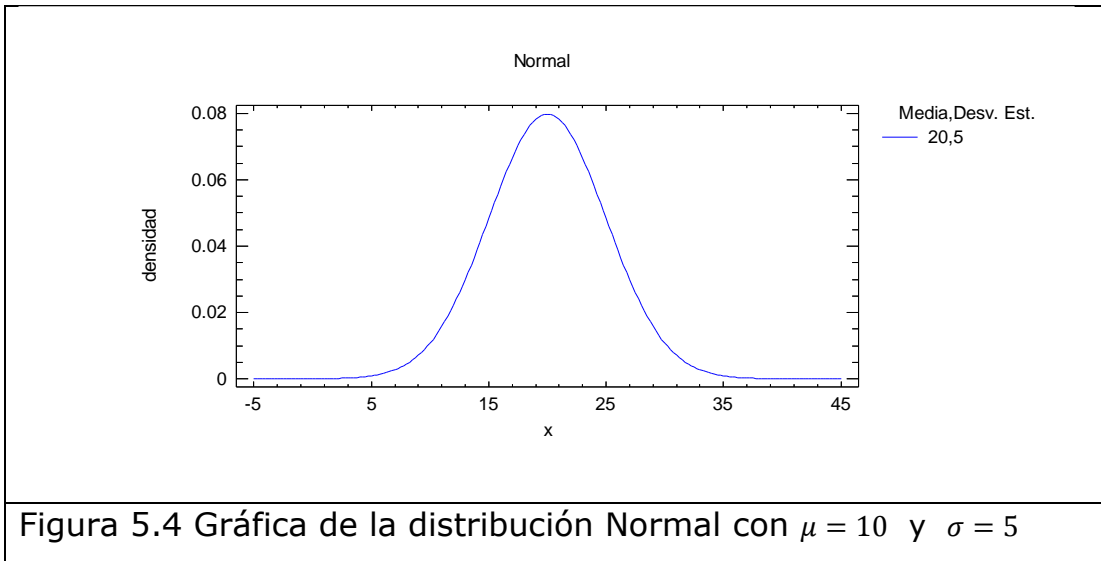
En la figura 5.3 esta la grafica de probabilidad de Poisson para el ejemplo 5.5,





### 5.6 Distribución normal.

Una distribución normal de media  $\mu$  y desviación estándar  $\sigma$  se designa por  $N(\mu, \sigma)$ . Su gráfica es la campana de Gauss y se muestra en la figura 5.4,

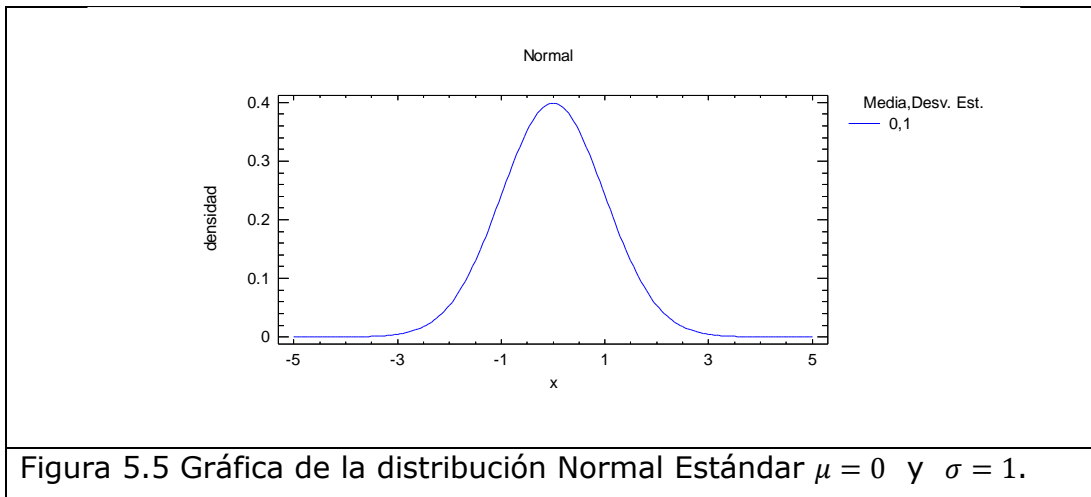


El área de la curva determinada por la función y el eje de abscisas es igual a la unidad. Es una curva simétrica respecto al eje que pasa por  $x = \mu$ , deja un área igual a 0.5 a la izquierda y otra igual a 0.5 a la derecha. Una variable aleatoria  $x$  se distribuye normalmente si su función de densidad es,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}; \quad -\infty < x < \infty$$

Donde:  $\mu = E(X), \quad -\infty < \mu < \infty;$   
 $Var(X) = \sigma^2, \quad \sigma^2 > 0;$   
 $e = 2.71828 \dots$   
 $\pi = 3.141592 \dots$

La **Distribución Normal Estándar**, o estandarizada, es aquella que tiene media igual a cero ( $\mu = 0$ ) y desviación estándar igual a la unidad ( $\sigma = 1$ ), simbólicamente  $N(0,1)$  y su grafica se muestra en la figura 5.5.



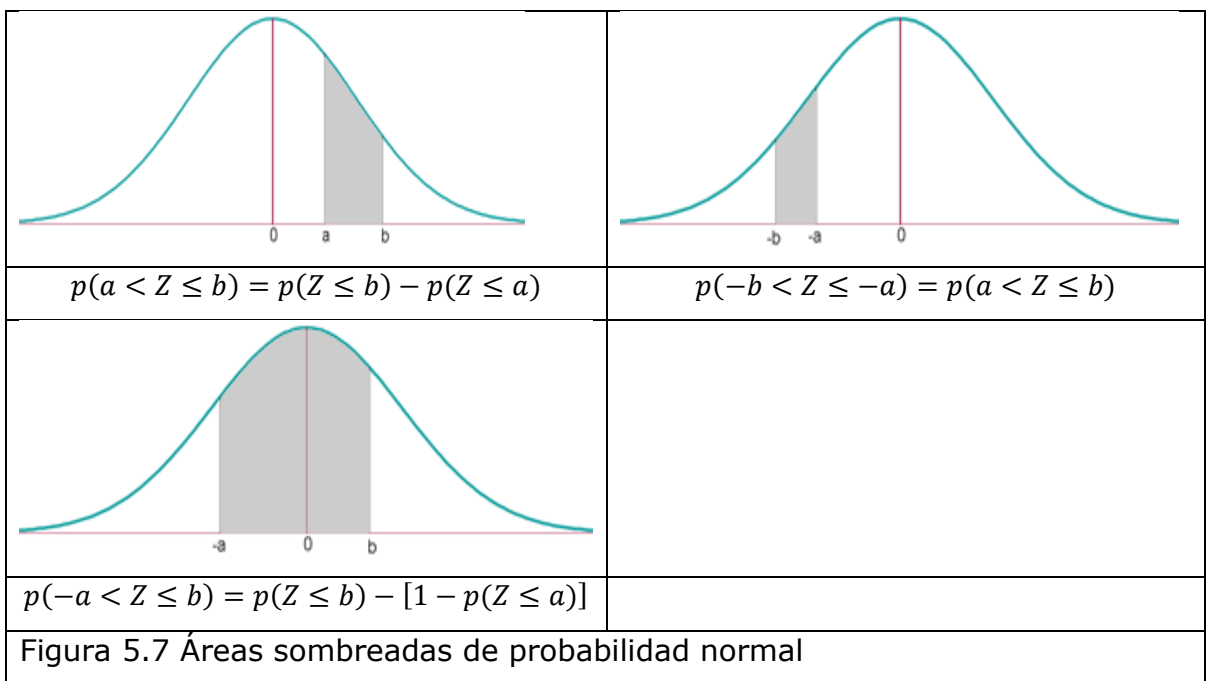
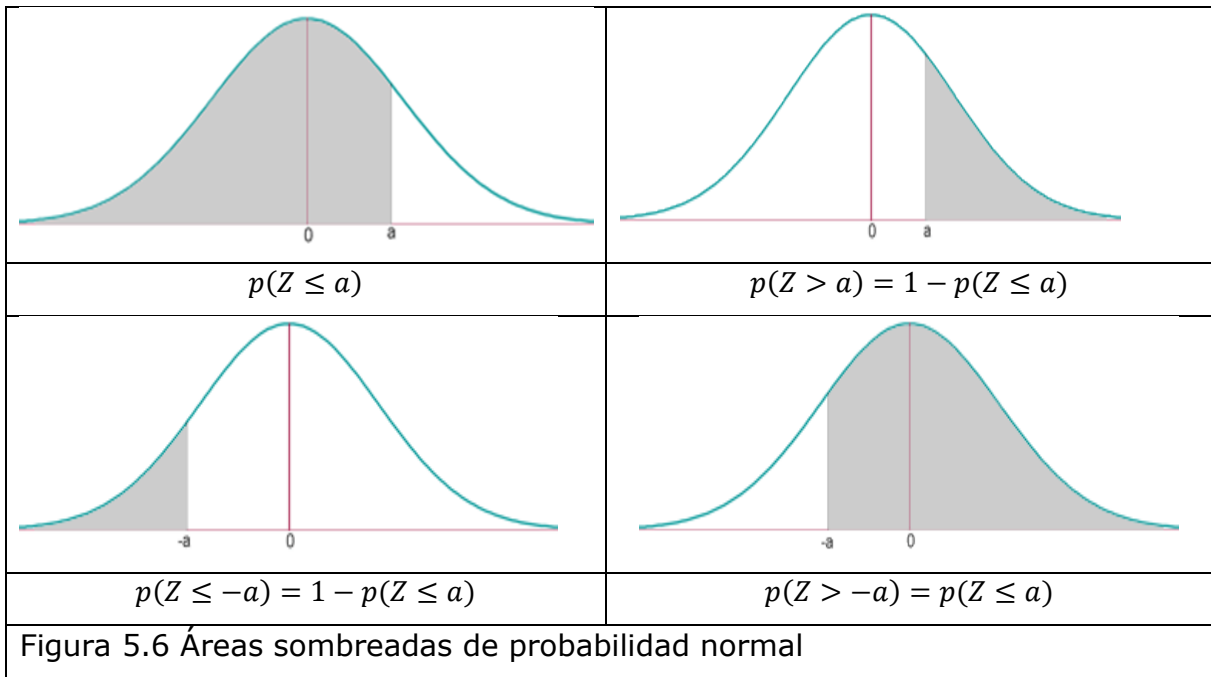
La probabilidad de la variable  $x$  dependerá del área sombreada como se puede ver en las figuras 5.6 y 5.7. Y para calcularla utilizaremos las tablas de probabilidad Normal (ver figura 5.8 y en el apéndice).

Para poder utilizar las tablas de la Normal tenemos que transformar la variable  $x$  que sigue una distribución  $N(\mu, \sigma)$  en otra variable  $Z$  (la estandarización de la variable  $x$ ) que siga una distribución  $N(0,1)$ .

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

En el cálculo de probabilidades de la distribución normal, la tabla nos da las probabilidades de  $p(z \leq k)$ , siendo  $z$  la variable estandarizada. Su función de densidad es:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}; \quad -\infty < z < \infty$$



Estas probabilidades nos dan la función de distribución  $p(z \leq k)$ . La búsqueda del valor de  $z$  depende del valor de  $k$  en la primera columna de la tabla de la Normal y de las centésimas en la primera fila de arriba de la tabla de la normal (ver figura 5.8).

$z_0$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549

Figura 5.8 Tabla de la Normal

**Ejemplo 5.6** En una ciudad se estima que la temperatura máxima en el mes de junio tiene una distribución normal, con media  $\mu = 27^\circ$  y desviación estándar  $\sigma = 5^\circ$ . Calcular el número de días del mes en los que se espera alcanzar máximas entre  $25^\circ$  y  $30^\circ$ .

La probabilidad de que las temperaturas máximas estén entre  $25^\circ$  y  $30^\circ$  es,

$$\begin{aligned}
 p(25 < x < 30) &= p\left[\frac{25 - 27}{5} < z \leq \frac{30 - 27}{5}\right] = p(-0.4 < z \leq 0.6) \\
 &= p(z \leq 0.6) - [1 - p(z \leq 0.4)] = 0.7257 - (1 - 0.6554) = 0.3811
 \end{aligned}$$

El número de días del mes en los que se espera alcanzar máximas entre  $25^\circ$  y  $30^\circ$  es,

$$(0.3811)(30) = \mathbf{11 \text{ dias}}$$

### 5.7 Distribución uniforme

En teoría de la probabilidad, la **Distribución Uniforme Discreta** es una distribución de probabilidad que asume un número finito de valores con la misma probabilidad.

Si la variable aleatoria  $x$  asume los valores reales  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$  con idénticas probabilidades, entonces, la distribución uniforme discreta está dada por:

$$f(x; k) = \frac{1}{k}, \quad x = x_1, x_2, \dots, x_k$$

Utilizamos la notación  $f(x; k)$  en vez de  $f(x)$  para indicar que la distribución uniforme depende del valor de  $k$ .

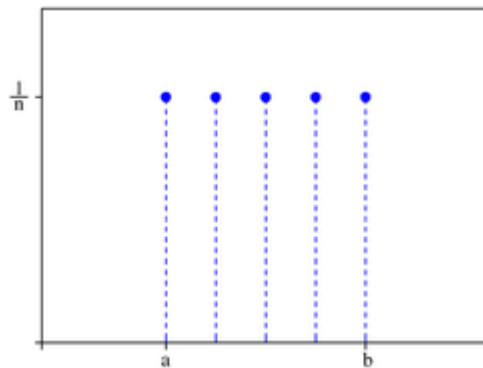


Figura 5.9 Gráfica de la distribución uniforme discreta

La media y la varianza de la distribución uniforme discreta  $f(x; k)$  son:

$$\mu = \sum_i^n \frac{x_i}{n}, \quad y \quad \sigma^2 = \sum_i^n \frac{(x_i - \mu)^2}{n}$$

**Ejemplo 5.7** Para un dado perfecto, todos los resultados tienen la misma probabilidad  $1/6$ . Luego, la probabilidad de que al lanzarlo caiga 4 es  $1/6$ .

Para una moneda perfecta, todos los resultados tienen la misma probabilidad  $1/2$ . Luego, la probabilidad de que al lanzarla caiga cara es  $1/2$ .

En teoría de probabilidad y estadística, la **Distribución Uniforme Continua** es una familia de distribuciones de probabilidad para variables aleatorias continuas, tales que cada miembro de la familia, todos los intervalos de igual longitud en la distribución en su rango son igualmente probables. El

dominio está definido por dos parámetros,  $a$  y  $b$ , que son sus valores mínimo y máximo. La distribución es a menudo escrita en forma abreviada como  $U(a, b)$ .

Sea  $x$  una variable aleatoria con distribución uniforme continua, entonces su función de densidad de probabilidad esta dada por:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}; \quad a \leq x \leq b$$

Donde  $a$  y  $b$  son dos numeros reales tales que  $a < b$ .

*Todos los valores probables de  $x$  entre  $a$  y  $b$  son igualmente probables.*

Gráficamente se observa de la siguiente manera:

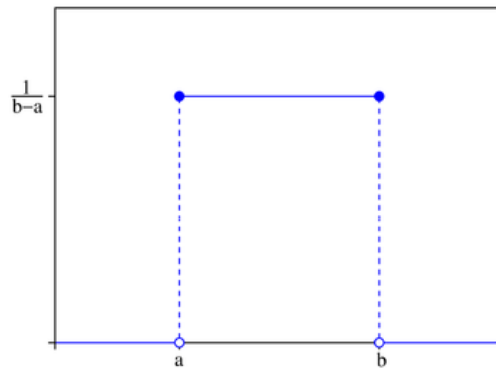


Figura 5.10 Gráfica de la Distribución Uniforme continua.

La media y la varianza de la distribución uniforme continua  $f(x)$  son:

$$\mu = E(X) = \frac{a+b}{2} \quad y \quad \sigma^2 = Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

**Ejemplo 5.8** El volumen de precipitaciones estimado para el próximo año en la ciudad de Aguascalientes va a oscilar entre 450 y 550 litros por metro cuadrado. Calcular la función de distribución, la precipitación media y varianza esperadas,

$$f(x) = \frac{1}{550 - 450} = \mathbf{0.01}$$

Es decir, que el volumen de precipitaciones esté entre 450 y 451 litros tiene un 1% de probabilidades; que esté entre 451 y 452 litros, otro 1%, etc.

El valor medio esperado es,

$$\mu = E(X) = \frac{450 + 550}{2} = \mathbf{500 \text{ ltr.}}$$

El valor de varianza es

$$\sigma^2 = Var(X) = \frac{(550 - 450)^2}{12} = \mathbf{833.3} \quad \text{donde: } \sigma = \sqrt{833.3} = \mathbf{28.86}$$

## Ejercicios unidad 5

1. En cierta región ganadera, la abundancia de una especie tóxica al ganado produce intoxicaciones con una probabilidad de 0.0003. Si en esa región hay 10,000 cabezas de ganado, ¿Cuál es la probabilidad de que se presenten exactamente 5 casos de intoxicación por dicha especie?
2. El Estudio de un inventario determina que, en promedio, las demandas de un artículo en particular en un almacén se realizan 5 veces al día. ¿Cuál es la probabilidad de que en un día dado se pida este artículo más de cinco veces?
3. La probabilidad a que una cierta clase de componentes pase con éxito una determinada prueba de impacto es  $\frac{3}{4}$  y se quiere encontrar la probabilidad de que exactamente dos de los siguientes 4 componentes que se ensayan pasen la prueba, ¿Cuál es el modelo probabilístico recomendable para calcular la probabilidad de ocurrencia de dicho evento?
4. En una oficina gubernamental de una ciudad laboran 8 servidores públicos, de los cuales 6 son corruptos y 2 no lo son. Si se eligen 4 al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que todos sean corruptos?
5. El tiempo de supervivencia de una bacteria tratada con antibióticos y que crece sobre hojas de lechuga, se distribuye con una media de 11 minutos y una desviación estándar de 2 minutos. Si se tratan las hojas de lechuga con antibiótico, ¿Encuentre la probabilidad de que algunas bacterias sobrevivan a lo mas 12 minutos?
6. Una compañía aérea sabe que el equipaje de sus pasajeros tiene como media 25 Kg con una desviación de 6 Kg. Si uno de sus aviones transporta 50 pasajeros y no debe cargar más de 1300 Kg en sus compartimientos, ¿Encuentre la probabilidad de que los aviones de esta compañía superen el margen de seguridad?



7. Entre las 120 solicitudes para un trabajo, sólo 80 son realmente aptos. Si 5 de los solicitantes se seleccionan al azar para una entrevista más extensa, ¿Encuentre la probabilidad de que sólo 2 de los 5 sean aptos para el trabajo?
8. Un ingeniero de control de tráfico informa que el 75% de los vehículos que pasan por un punto de verificación tienen matrículas del estado. ¿Cuál es la probabilidad de que más de cuatro de los siguientes nueve vehículos no sean del estado?
9. Suponga que para cierta clase de flores cerca de 5% de las semillas no germina. Las semillas se empaquetan y se venden en cajas de 10, con la garantía de que al menos 9 germinarán. Hallar la probabilidad de que en una caja fija arbitraria no contenga la propiedad garantizada.
10. Entre las personas que donan sangre a una clínica, 80% tiene Rh+. Cinco personas donan sangre en la clínica un día determinado.
  - a. Calcule la probabilidad de que al menos una de las cinco no tenga el factor Rh+.
  - b. Calcule la probabilidad de que cuando mucho cuatro de las cinco tengan sangre Rh+.
11. Un motor de automóvil de ocho cilindros tiene dos bujías que fallan. Si se quitan las cuatro bujías de un lado del motor, ¿Cuál es la probabilidad de que entre éstas estén las dos que fallan?
12. En un almacén hay 10 impresoras, cuatro de las cuales son defectuosas. Una compañía selecciona al azar cinco de ellas para comprarlas. ¿Cuál es la probabilidad de que las cinco máquinas seleccionadas no tengan defectos?
13. En una jaula hay 10 roedores recién nacidos: 5 machos y 5 hembras. Si se eligen cinco al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que se tenga al menos uno de cada sexo?
14. Supóngase que el contenido de azúcar por naranja es en promedio de 0.5 oz con una desviación estándar de 0.05 oz. ¿Cuál es la probabilidad de que una naranja seleccionada aleatoriamente tenga un contenido de azúcar entre 0.54 y 0.615 oz?

15. Los tiempos de primera avería de una unidad de cierta marca de impresoras de inyección de tinta es en promedio de 1500 hrs. Con una varianza de 40000 hrs. ¿Qué fracción de esas impresoras fallaran antes de mil horas?
16. Una operación de llenado de botellas con leche está diseñada para llenar botellas con 32 oz de leche con una desviación estándar de 1.0 oz. Considérese que la cantidad de llenado se distribuye normalmente. ¿Cuál es la probabilidad de que una botella seleccionada aleatoriamente contenga menos de 30 oz?
17. El tiempo de servicio de cierta marca de llantas de automóviles sigue una distribución normal con una media y un desviación estándar de 32000 y 1000 km., respectivamente. Indicar el porcentaje de llantas vendidas que se requiere reemplazar si esta marca de llantas es garantizada por 30000 km.
18. Cierta clase de lámina de metal tiene, en promedio, cinco defectos por cada 10 m<sup>2</sup>. si suponemos una distribución de Poisson, ¿Cuál es la probabilidad de que una lámina de metal de 15 m<sup>2</sup> tendrá al menos seis defectos?